Η δομή των δεύτερων δυϊκών Καθολικά Αδιάσπαστων Banach αλγεβρών και οι άλγεβρες διαγωνίων τελεστών

Ανδρέας Τόλιας
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Μη τεριμμένη διάσπαση ενός χώρου Banach X, ονομάζεται η γραφή $X = Y \oplus Z$ με τους Y, Z να είναι απειροδιάστατοι. Ένας απειροδιάστατος χώρος Banach X λέγεται αδιάσπαστος αν δεν επιδέχεται μη τεριμμμένη διάσπαση. Ο X λέγεται Καθολικά Αδιάσπαστος [ή κληρονομικά αδιάσπαστος, Hereditarily Indecomposable, (H.I.)] αν κανένας απειροδιάστατος υπόχωρός του δεν επιδέχεται μη τεριμμένη διάσπαση. Ένας χαρακτηρισμός των H.I. χώρων είναι ο εξής: Ο X είναι H.I. αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος Y, Z απειροδιάστατων υποχώρων του X και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $y \in Y$, $z \in Z$ με $\|y\| = \|z\| = 1$ ώστε $\|y - z\| < \varepsilon$.

Η έννοια ορίστηκε το 1992 στο άρθρο των W.T. Gowers και B. Maurey [6] όπου κατασκευάστηκε το πρώτο παράδειγμα χώρου με αυτή την ιδιότητα. Επίσης στο ίδιο άρθρο δείχθηκε ότι για κάθε μιγαδικό H.I. χώρο X, κάθε φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : X \to X$ είναι της μορφής $T = \lambda I + S$ με $\lambda \in \mathbb{C}$ και S ένα strictly singular τελεστή. Αυτό έχει ως συνέπεια ότι για κάθε H.I. χώρο (πραγματικό ή μιγαδικό), ο χώρος δεν είναι ισόμορφος με κανένα γνήσιο υπόχωρό του.

Από τότε η κλάση των H.I. χώρων και η θέση της μέσα στη θεωρία των χώρων Banach έχει μελετηθεί εκτενώς από πολλούς ερευνητές. Αναφέρουμε ενδεικτικά κάποια αποτελέσματα. Ο W.T. Gowers το 1996 στην περίφημη διχοτομία του, ([7]) απέδειξε ότι κάθε χώρος Banach περιέχει είτε έναν υπόχωρο με unconditional βάση ή έναν H.I. υπόχωρο. Ο Σ. Αργυρός το 2001 ([1]) έδειξε ότι αν ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach περιέχει ισομορφικό αντίγραφο κάθε αυτοπαθούς χώρου τότε περιέχει (τον $C[0,1]$ και άρα) ισομορφικό αντίγραφο κάθε διαχωρισίμου χώρου Banach. Οι Σ. Αργυρός και Β. Φελουζής απέδειξαν ([3], 2000) ότι κάθε χώρος Banach περιέχει είτε τον $\ell_1(\mathbb{N})$ ή έναν υπόχωρο που είναι πηλίκο ενός H.I. χώρου. Οι Σ. Αργυρός και Θ. Ραϊκόφτσαλης ([4], 2010) έδειξαν ότι κάθε αυτοπαθής διαχωρίσιμος χώρος Banach είναι πηλίκο ενός αυτοπαθούς H.I. χώρου. Άρα κάθε αυτοπαθής διαχωρίσιμος χώρος περιέχεται σε έναν αυτοπαθή αδιάσπαστο χώρο. Το 2004 ([5]) κατασκευάστηκε από τους Σ. Αργυρό και Α. Τόλια ο πρώτος μη διαχωρίσιμος H.I χώρος. Επίσης, μεταξύ άλλων, αποδείχθηκε η πλήρης διχοτομία για πηλίκα H.I. χώρων. Συγκεκριμένα αν Z είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach που δεν περιέχει τον $\ell_1(\mathbb{N})$, τότε ο Z είναι πηλίκο ενός H.I. χώρου, δηλαδή υπάρχει H.I. χώρος X και τελεστής πηλίκο (δηλ. επί) $Q : X \to Z$ και μάλιστα ο Z^* περιέχεται στον X^* ως συμπληρωματικός υπόχωρος. Από την κατασκευή του, ο X έχει μια boundedly complete Schauder βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Στην περίπτωση που ο Z έχει Schauder βάση, ο X^* είναι ισομορφικός με το ευθύ άθροισμα $Z^* \oplus X_*$ όπου $X_* = \overline{\text{span}}\{e_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ο προδυϊκός του X και είναι επίσης H.I. Στην παρούσα εργασία θα εξετάσουμε τι μπορούμε επιπλέον να επιτύχουμε για τους X_*, X, X^* στην περίπτωση που ο δυϊκός χώρος Z^* έχει τη δομή Banach άλγεβρας.

Όταν X είναι ένας χώρος Banach με Schauder βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : X \to X$ θα λέγεται διαγώνιος, αν υπάρχει $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία βαθμωτών, ώστε $T(e_n) = \lambda_n e_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Με $\mathcal{L}_{\text{diag}}(X)$ συμβολίζουμε την άλγεβρα των φραγμένων γραμμικών τελεστών $T : X \to X$ που είναι διαγώνιοι. Συμβολίζουμε με $\overline{e}_n$ τον διαγώνιο τελεστή $\overline{e}_n = e_n^* \otimes e_n$,

δηλαδή το διαγώνιο τελεστή $\overline{e}_n : X \to X$ που ορίζεται από τον τύπο $\overline{e}_n(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i) = \lambda_n e_n$. Οι Σ. Αργυρός, Ε. Δεληγιάννη και Α. Τόλιας απέδειξαν το εξής: Αν X είναι χώρος Banach με μια νορμαρισμένη μονότονη Schauder βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $C_1, C_2 > 0$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) Ο τελεστής

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & X^* & \longrightarrow & \mathcal{L}_{\mathrm{diag}}(X) \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n^* & \longmapsto & \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \overline{e}_n \end{array}$$

είναι καλά ορισμένος επί και ισομορφισμός,
με $C_1 \cdot \|f\| \leq \|\Phi(f)\| \leq C_2 \cdot \|f\|$ για κάθε $f \in X^*$.
(Η σύγκλιση της σειράς στον X^* λαμβάνεται ως προς την w^* τοπολογία, ενώ στον $\mathcal{L}_{\mathrm{diag}}(X)$ ως προς την strong operator topology).

(2) (2α) $C_1 \cdot |\sum_{i=1}^{n} \mu_i| \leq \|\sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i\|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\mu_1, \cdots, \mu_n \in \mathbb{R}$.

(2β) $\|\sum_{i=1}^{n} a_i \beta_i e_i^*\| \leq C_2 \cdot \|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*\| \cdot \|\sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i^*\|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \beta_1, \cdots, a_n, \beta_n \in \mathbb{R}$.

(3) Υπάρχει ένα norming σύνολο K του X ώστε:

(3α) $\pm C_1 \sum_{i=1}^{n} e_i^* \in K$ για κάθε n.

(3β) $K \cdot K \subset C_2 \cdot B_{X^*}$

(δηλ. αν $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*, \sum_{i=1}^{m} \beta_i e_i^* \in K$ τότε $\|\sum_{i=1}^{\min\{n,m\}} a_i \beta_i e_i^*\| \leq C_2$).

Με χρήση του θεωρήματος αυτού επιτεύχθηκε η κατασκευή μιας άλγεβρας διαγωνίων τελεστών επί ενός χώρου Banach X με βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ώστε η άλγεβρα διαγωνίων τελεστών $\mathcal{L}_{\mathrm{diag}}(X)$ να είναι (ισομετρική της άλγεβρας X^* και) H.I.

Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε τη δομή των δεύτερων δυϊκών H.I Banach αλγεβρών. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 1. Έστω Z ένας χώρος Banach που ικανοποιεί τα εξής:

(i) Ο Z έχει μια νορμαρισμένη διμονότονη βάση Schauder $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Θα συμβολίζουμε με $(z_i^*)_{i\in\mathbb{N}}$ τα διορθογώνια συναρτησοειδή της βάσης αυτής.

(ii) Ο Z^* είναι Banach άλγεβρα ως προς τα κατά σημείο γινόμενα. Δηλαδή αν $f, g \in Z^*$, $f = w^* - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i z_i^*$, $g = w^* - \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i z_i^*$ τότε η σειρά $f \cdot g = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \mu_i z_i^*$ συγκλίνει στη w^* τοπολογία στον Z^* και $\|f \cdot g\|_{Z^*} \leq \|f\|_{Z^*} \cdot \|g\|_{Z^*}$.

(iii) Ο Z δεν περιέχει ισομορφικά τον $\ell_1(\mathbb{N})$.

Τότε υπάρχει ένας χώρος Banach X με boundedly complete Schauder βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε

(α) Ο X είναι H.I. χώρος.

(β) Ο $X_* = \overline{\mathrm{span}}\{e_n^* : n \in \mathbb{N}\}$, που είναι προδυϊκός του X, είναι H.I. Banach άλγεβρα (με το κατά σημείο γινόμενο ως προς την $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$).

(γ) Υπάρχει τελεστής $Q : X \to Z$ επί και μάλιστα ο X^* είναι ισομορφικός με το ευθύ άθροισμα $Z^* \oplus X_*$.

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η βάση $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι υποσυμμετρική, τότε ο X μπορεί να επιλεγεί ώστε να ισχύει επιπλέον το εξής:

(δ) Ο X^* είναι ισομορφικός με το χώρο διαγωνίων τελεστών $\mathcal{L}_{\text{diag}}(X)$. Σε αυτή την περίπτωση $(X_*)^{**} = X^* = \mathcal{L}_{\text{diag}}(X)$ με την άλγεβρα αυτή να είναι ισόμορφη της $Z^* \oplus X_*$ ή της $Z^* \oplus \text{span}\{\chi_{\mathbb{N}}\} \oplus X_*$.

Σκιαγράφηση της απόδειξης. Θεωρούμε $\mathcal{L} = (\Lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ μια διαμέριση του $\mathbb{N}$ σε άπειρα σύνολα. Ορίζουμε

$$G_Z^{\mathcal{L}} = \{\sum_{i=1}^{d} a_i \chi_{E\cap\Lambda_i},\ a_i \in \mathbb{Q},\ i = 1, \dots, d$$

$$E \text{ πεπ. διάστημα του } \mathbb{N},\ \|\sum_{i=1}^{d} a_i z_i^*\| \leq 1\}$$

και $G_{I,Z}^{\mathcal{L}} = G_Z^{\mathcal{L}} \cup \{\pm\chi_E :\ E \text{ πεπ. διάστημα του } \mathbb{N}\}$. Τα σύνολα αυτά είναι κλειστά στα κατά σημείο γινόμενα.

Θεωρούμε τους χώρους $Y_Z = \overline{(c_{00}(\mathbb{N}), \|\ \|_{G_Z^{\mathcal{L}}})}$ και $Y_{I,Z} = \overline{(c_{00}(\mathbb{N}), \|\ \|_{G_{I,Z}^{\mathcal{L}}})}$. Αποδεικνύεται ότι ο πρώτος δεν περιέχει τον $\ell_1(\mathbb{N})$ ενώ αν η βάση $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι υποσυμμετρική τότε ούτε ο δεύτερος περιέχει τον $\ell_1(\mathbb{N})$. Χρησιμοποιούμε στα παρακάτω τα σύμβολα G και Y για να συμβολίσουμε είτε τα G_Z και Y_Z ή τα $G_{I,Z}$ και $Y_{I,Z}$ αντίστοιχα.

Από ένα αποτέλεσμα του Bourgain προκύπτει ότι υπάρχει διατακτικός $\xi < \omega_1$ ώστε ο Y δεν περιέχει ℓ_1^ξ spreading model. Για αυτό το ξ αποδεικνύεται ότι το G είναι $\mathcal{S}_\xi$ bounded (βλ. [5]). Επιλέγοντας κατάλληλη γνησίως αύξουσα ακολουθία αριθμησίμων διατακτικών $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ με $\xi_1 = \xi$ και κατάλληλη γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$, ο χώρος X ορίζεται να είναι η πλήρωση του χώρου $(c_{00}(\mathbb{N}), \|\ \|_D)$, όπου το σύνολο D είναι το ελάχιστο υποσύνολο του $c_{00}(\mathbb{N})$ για το οποίο

(i) $G \subset D$.

(ii) Το D είναι κλειστό στις $(\mathcal{S}_{\xi_{2j}}, \frac{1}{m_{2j}})$ πράξεις.

(iii) Το D είναι κλειστό στις $(\mathcal{S}_{\xi_{2j-1}}, \frac{1}{m_{2j-1}})$ πράξεις πάνω σε $2j-1$ special ακολουθίες.

(iv) Το D είναι κλειστό στους ρητούς κυρτούς συνδυασμούς.

(v) Το D είναι κλειστό στα κατά σημείο γινόμενα.

(vi) Το D είναι κλειστό στους περιορισμούς σε διαστήματα του $\mathbb{N}$.

Έχοντας ορίσει τον X με σημείο έναρξης το $G = G_Z^{\mathcal{L}}$, αποδεικνύεται ότι η αντιστοίχηση $Q(e_n) = z_i$ όταν $n \in \Lambda_i$ επεκτείνεται σε ένα φραγμένο γραμμικό τελεστή από το X επί του Z και ο X^* είναι ισόμορφος με τον $X_* \oplus Z^*$. Ο X και ο X_* αποδεικνύεται ότι είναι H.I, ενώ λόγω του το norming σύνολο D είναι κλειστό στα κατά σημείο γινόμενα επάγει στον X_* και στον X^* δομή Banach άλγεβρας.

Στην περίπτωση που η βάση $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι υποσυμμετρική και έχοντας ξεκινήσει την κατασκευή από το $G = G_{I,Z}^{\mathcal{L}}$, τότε το norming σύνολο D θα περιέχει τα συναρτησοειδή $\pm\sum_{i=1}^{n} z_i^*$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έτσι σύμφωνα με το θεώρημα του [2] που προαναφέραμε, ο X^* είναι ισομορφικός με το χώρο διαγωνίων τελεστών $\mathcal{L}_{\text{diag}}(X)$. Έτσι, σε αυτή την περίπτωση $(X_*)^{**} = X^* = \mathcal{L}_{\text{diag}}(X)$ και η άλγεβρα αυτή είναι ισόμορφη της $Z^* \oplus X_*$ είτε της $Z^* \oplus \text{span}\{\chi_{\mathbb{N}}\} \oplus X_*$. Η διάκριση των δύο αυτών περιπτώσεων οφείλεται στο εξής γεγονός. Λόγω της κατάσκευής του ο X^* περιέχει το $\chi_{\mathbb{N}} = w^* - \sum_{i=1}^{\infty} z_i^*$. Από την άλλη ο Z^* ενδέχεται να το περιέχει (πρώτη περίπτωση) ή να μην το περιέχει (δεύτερη περίπτωση). □

Αναφορές

[1] S.A. Argyros, *A universal property of reflexive hereditarily indecomposable Banach spaces*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **129**, (2001), no. 11, 3231-3239.

[2] S.A. Argyros, I. Deliyanni, A. Tolias, *Hereditarily Indecomposable Banach algebras of diagonal operators*, *Israel J. Math*, (to appear), arXiv:0902.1646.

[3] S.A. Argyros, V. Felouzis, *Interpolating hereditarily indecomposable Banach spaces*, *J. Amer. Math. Soc.*, **13**, (2000), no. 2, 243–294.

[4] S.A. Argyros, T. Raikoftsalis, *The cofinal property of the Reflexive Indecomposable Banach spaces*, (preprint), arXiv:1003.0870v1.

[5] S.A. Argyros, A. Tolias, *Methods in the Theory of Hereditarily Indecomposable Banach Spaces*, *Memoirs of the AMS*, **170**, (2004), no. 806, vi+114pp.

[6] W.T. Gowers, B. Maurey, *The Unconditional basic Sequence Problem*, *J. Amer. Math. Soc.*, **6**, (1993), no. 4, 851–874.

[7] W.T. Gowers, *A new dichotomy for Banach spaces*, *Geom. and Funct. Anal.*, **6**, (1996), 1083-1093.